This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

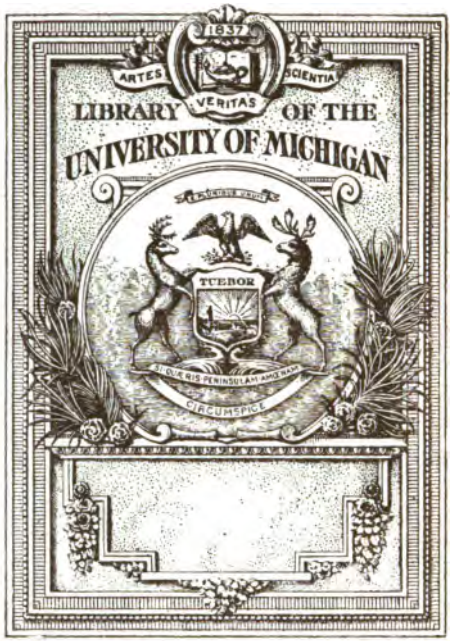
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

V56-2

Alexander Ziwet
QA
862
.G9
G2

Ueber

die Rotationsmaschine

von

Bohnenberger.

Inaugural-Dissertation,

der

philosophischen Facultät zu Jena

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

R. Gantzer.

Jena, 1867.

Druck von W. Ratz.

Gift of
Prof. A. Ziwet
Sept, 18 1906

QA
862
.G9
G21

§. 1.

Die von Bohnenberger construirte Rotationsmaschine soll das Gesetz erklären, nach welchem bei der Umdrehung der Erde um ihre Achse letztere ihre Lage im Weltraume verändert. Sie besteht aus einer möglichst genau gearbeiteten Kugel aus Elfenbein oder Messing, welche mit Hülfe dreier messingener Ringe so aufgehängt ist, daß die durch ihren Mittelpunkt gehende Achse nach allen Richtungen frei beweglich ist, und daß nur der Mittelpunkt der Kugel fest bleibt. Es ist in jeder Weise darauf Bedacht genommen, alle Reibungen so gering als möglich zu machen.

Wird mit Hülfe eines um die Achse der Kugel gewickelten Fadens die Kugel in Rotation versetzt, so bemerkt man, daß die vorher äußerst leicht bewegliche Kugelachse jetzt nur einem, je nach der Rotationsgeschwindigkeit schwächeren oder stärkeren Drucke, welcher ihre Richtung gegen den Horizont ändern soll, nachgiebt, indem sie sich bewegt, ohne ihren Neigungswinkel gegen den Horizont zu ändern. Man beobachtet dies deutlich, wenn man den innersten Ring, welcher die Pfannen für die Kugelachse trägt, in der Nähe des einen der Endpunkte der Achse, z. B. in der Nähe des tiefer liegenden, mit einem kleinen Gewichte belastet; die Achse bewegt sich dann in der Richtung, welche der Rotationsrichtung der Kugel ent-

164528

gegengesetzt ist, indem sie scheinbar einen Kreiskegel beschreibt, dessen Mittelpunkt mit dem der Kugel zusammenfällt. Die Drehung der Achse findet aber in der entgegengesetzten Richtung statt, sobald das Gewicht am oberen Ende der Achse angebracht wird. Wir werden sehen, daß die Achse nicht genau einen doppelten Kreiskegel beschreibt. Es ist vielmehr ein Doppelkegel, dessen Mantel gefurcht ist. Ein gegen die Achse dieses Kegels senkrecht geführter Schnitt ergiebt eine wellenförmige Kurve, welche von französischen Mathematikern mit dem Namen Serpoloide belegt worden ist.

Uebrigens vergrößert oder verkleinert sich die Geschwindigkeit, mit welcher die Achse der Kugel den Mantel dieses Kegels beschreibt, zugleich mit der Schwere des aufgelegten Gewichtes, der kleineren oder größeren Entfernung des Schwerpunktes dieses aufgelegten Uebergewichtes von der Achse der Kugel, und mit der Ab- oder Zunahme der Rotationsgeschwindigkeit der Kugel.

Zu einer elementaren Erklärung dieser Erscheinungen gelangt man dadurch, daß man die Kugel aus materiellen Scheiben zusammengesetzt denkt, welche durch senkrecht gegen die Rotationsachse geführte Schnitte erhalten worden sind. Es haben deshalb die Herren Prof. Magnus und Fessel bei dem von ihnen construirten Apparate die Kugel der Bohnenbergerschen Maschine durch eine materielle Scheibe ersetzt.

In derselben Weise, wie das Gewicht bei dem Bohnenbergerschen Apparate, wirkt die Sonne auf unsere Erde, weil diese ein abgeplattetes Sphäroid ist. Die Erde erleidet deswegen eine Anziehung von der Sonne in der Weise, d dieser in der Ekliptik stehende Himmelskörper den Win zwischen der Ebene der Ekliptik und der des Erdäquators verkleinern strebt. Die dadurch bewirkte Drehung der Er

achse verursacht eine Bewegung des Aequinoctialcolur, d. h. der Durchschnittslinie der beiden eben genannten Ebenen. Diese Bewegung ist unter dem Namen „Präcession der Aequinoctien" bekannt. Die Größe der anziehenden Kraft kann aber hier nicht constant sein; weil im Juni und December der Neigungswinkel beider Ebenen einen Maximalwerth, im März und September aber einen Minimalwerth erlangt, so muß das Vorrücken des Frühlingsanfangs-Punktes, d. h. die Drehung der Erdachse um den Erdmittelpunkt zur Zeit der Solstitien schneller, zur Zeit der Aequinoctien langsamer erfolgen, als zu irgend einer anderen Jahreszeit. Die Bestätigung dieser theoretischen Entwickelungen durch die astronomischen Forschungen liefert den Beweis, daß die Bohnenbergersche Maschine in der That dazu dient, die Phänomene des Vorrückens der Aequinoctien und des Schwankens der Erdachse zu versinnlichen.

§. 2.

Bei der Analysis dieses Problems, welches die Erscheinungen der Bohnenbergerschen Rotationsmaschine darbieten, handelt es sich also um die Lösung der Aufgabe, die Lage eines, um einen seiner Punkte sich drehenden Körpers, dessen Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte der Rotation nicht zusammenfällt, für jeden Zeitmoment zu bestimmen. Es ist bekannt, daß dies Problem auf elliptische Integrale führt, und die Lösung der Aufgabe wird also unter eben so viel Formen möglich sein, als die bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit zur leichteren und übersichtlicheren Darstellung der elliptischen Functionen ersonnen haben. Man sucht in der Regel den Ausdruck vom 3. oder 4. Grade unter dem Wurzelzeichen so zu transformiren, daß die ungeraden Potenzen

der Variabeln daraus verschwinden, bringt das Differential auf eine der drei Normalformen von Legendre und hat dann die Lösung der gestellten Aufgabe fast schon vollendet.

Einen anderen und (wie ich meine) durchaus nicht weitschweifigeren Weg hat mein hochverehrter Lehrer, Herr Prof. Weierstraß in Berlin eingeschlagen; in den meisten Fällen gelangt man zu einer schnellen Lösung und zu übersichtlichen Formeln. Da aber über diese Methode noch nichts veröffentlicht ist, so scheint es mir geboten, über die Theorie von Weierstraß einiges vorauszuschicken. Selbstverständlich werde ich mich auf die Theile der ganzen Theorie, welche zum Verständniß der folgenden Lösung unseres Problems erforderlich sind, beschränken. Aus dem ganzen Gebäude werde ich nur die Formeln hervorheben, welche im Folgenden zur Anwendung kommen.

Es sei R (x) eine Function 3. oder 4. Grades in x mit reellen Zahlcoefficienten. Zur Transformation von

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

wenden wir eine, rational aus x und $\sqrt{R(x)}$ zusammengesetzte Function 2. Grades in der neuen Variabeln s an, so beschaffen, daß sich nicht nur s selbst, sondern auch die Quadratwurzel aus einer ähnlichen Function 3. oder 4. Grades in s, also etwa $\sqrt{R_1(s)}$, rational durch x und $\sqrt{R(x)}$, und umgekehrt, daß sich auch x rational durch s und $\sqrt{R_1(s)}$ darstellen lassen. Unter diesen Bedingungen sind mehrere verschiedene Transformationen möglich. Bei einer von ihnen aber lassen sich die Constanten so wählen, daß in der Fun. tion $R_1(s)$ die Coefficienten der mit s^4 und mit s^3 behafteten Glieder verschwinden, daß also $R_1(s)$ nur vom 3. Grad ist und außerdem die 2. Potenz der Variabeln gar nicht en

hält. Ist nämlich

1. $R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$,

so hat man zur Transformation in dem angegebenen Sinne x aus der Gleichung

$$(x - x_0).^2 s^2 - G_1(x, x_0).s + G_2(x, x_0) = 0$$

zu bestimmen und in Nr. 1. einzuführen. Es bedeuten hier die Größen $G_1(x,x_0)$ und $G_2(x,x_0)$ Functionen von x u. x_0:

$$G_1(x,x_0) = \begin{cases} Ax_0^2x^2 + 2Bx_0x(x+x_0) + C(x+x_0)^2 \\ +2Cx_0x + 2B'(x+x_0) + A' \end{cases}$$

$$G_2(x,x_0) = \begin{cases} (B^2 - AC)x_0^2x^2 + (BC - AB')x_0x(x+x_0) \\ +\frac{1}{4}(C^2 - AA')(x+x_0)^2 + 2(C^2 - BB')x_0x \\ +(CB' - BA')(x+x_0) + B'^2 - A'C. \end{cases}$$

Ferner bezeichnet x_0 eine beliebige Constante, für welche das Vorzeichen von $\sqrt{R(x_0)}$ beliebig fixirt werden kann. Es sind bei Anwendung dieser Transformation in der That s und $\sqrt{R_1(s)}$ rationale Functionen von x und $\sqrt{R(x)}$, nämlich

$$s = \frac{\sqrt{R(x_0)}.\sqrt{R(x)} + G_1(x, x_0)}{2(x - x_0)^2}$$

oder

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(x_0)}}{x - x_0}\right)^2 - \frac{1}{4}A(x+x_0)^2 - B(x+x_0) - C$$

und

$$\sqrt{R_1(s)} = \left\{\frac{R(x)}{(x-x_0)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x)}{(x-x_0)^2}\right\}\sqrt{R(x_0)} - \left\{\frac{R(x_0)}{(x_0-x)^3} - \frac{1}{4}\frac{R'(x_0)}{(x_0-x)^2}\right\}\sqrt{R(x)}$$

Werden ferner die beiden Invarianten 2. und 3. Ordnung von $R(x)$ mit g_2 und g_3 bezeichnet, also wird gesetzt:

4. $$\begin{cases} g_2 = AA' + 3C^2 - 4BB' \text{ und} \\ g_3 = ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3, \end{cases}$$

so ist

5. $$R_1(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

so daß also e_1, e_2, e_3 die 3 Wurzeln der Gleichung $R_1(s)=0$ sind. Ergeben sie sich alle 3 als reell, so soll stets

6. $$e_1 > e_2 > e_3$$

sein; sind aber zwei von ihnen complex, so sollen diese mit e_2 und e_3 bezeichnet werden, so daß e_1 stets reell ist. Ferner gilt stets die Gleichung

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Eine Bedingung für die angewandte Transformationsformel war, daß auch x rational durch s und $\sqrt{R_1(s)}$ ausgedrückt werden könne. In der That wird

7. $$x - x_0 = \frac{\sqrt{R(x_0)}.\sqrt{R_1(s)} + \frac{1}{2}R'(x_0)(s - \frac{1}{12}R''(x_0)) + \frac{1}{24}R(x_0)R''(x_0)}{2(s - \frac{1}{12}R''(x_0))^2 - \frac{1}{24}AR(x_0)}$$

Daraus geht hervor, daß, wenn $x = x_0$ und gleichzeitig $\sqrt{R(x)} = \sqrt{R(x_0)}$ wird, die Variable s den Werth ∞ annehmen muß.

Besonders zu bemerken sind folgende 2 Fälle, nämlich erstens, wenn x_0 gleich einer der Wurzeln der Gleichung $R(x)=0$ wird, z. B. $=a$; dann ist

8. $$\begin{cases} s = \frac{1}{4}\frac{R'(a)}{x-a} + \frac{1}{24}R''(a) \\ \sqrt{R_1(s)} = \frac{1}{4}\frac{R'(a)}{(x-a)^2}\sqrt{R(x)} \text{ und} \\ x = a + \frac{2}{4}\frac{R'(a)}{s - \frac{1}{24}R''(a)}. \end{cases}$$

Zweitens, in dem Falle, daß $x_0 = \infty$ und $\frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0^2} = \sqrt{A}$ gesetzt wird, erhält man

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{A}.\sqrt{R(x)} + \frac{1}{2}Ax^2 + Bx + \frac{1}{2}C.$$

In diesem Falle wird s mit x zugleich unendlich, wäh-

in dem ersten Falle laut Formel 8. die Werthe a für x und ∞ für s zusammengehören.

In jedem Falle aber geht das Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ über in } -\frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}}.$$

Die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$$

ist hiernach also zurückgeführt auf die Bestimmung einer Function von u, welche für s gesetzt, der Differentialgleichung

9. $$\frac{ds}{du} = -\sqrt{R_1(s)}$$

genügt und für bestimmte Werthe des Arguments u unendlich wird. Nehmen wir als diesen Werth von u zunächst den Werth u = 0 an, so giebt es eine bestimmte eindeutige Function von u, welche den gestellten Bedingungen genügt; wir wollen diese Function mit p(u) bezeichnen, so daß also die Gleichung

10. $$s = p(u)$$

ein Integral der Differentialgleichung 9 repräsentirt; die Integrationsconstante ist dadurch bestimmt, daß die Werthe 0 für u und ∞ für s sich entsprechen. Die Function p(u) läßt sich in eine Potenzreihe nach u entwickeln, in der alle Coefficienten ganze Functionen der Invarianten g_2 und g_3 sind, die aber nicht stark convergirt. Man findet nämlich:

11. $$p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{4.5}u^2 + \frac{g_3}{4.7}u^4 + \frac{g_2^2}{16.3.25}u^6 + \frac{3\,g_2 \cdot g_3}{16.5.7}u^8 + \ldots\ldots$$

Diese Function p(u) ist also erstens eine gerade Function. Zweitens ist sie doppelt periodisch. Setzt man nämlich

12. $\omega_1 = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}}$ $\omega_3 = i\int_{-e_3}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}}$

oder $\omega_3 = {}^1/_2 \int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}} + \frac{i}{2}\int_{-e_1}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}}$

(ω_3 erhält den ersten oder den zweiten Werth, je nachdem e_2 und e_3 reelle oder conjugirt complexe Größen sind), so sind alle ganzen Vielfache von $2\omega_1$ und $2\omega_3$ Werthe des Arguments der Function $p(u)$, für welche letztere unendlich wird; alle Unendlichs von $p(u)$ sind also in der Formel

$$2m\omega_1 + 2n\omega_3$$

enthalten, wo m und n ganze, reelle Zahlen sind. Die Größen $2\omega_1$ und $2\omega_3$ bilden also ein System von Fundamentalperioden der Function $p(u)$, so daß nicht nur

$$p(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = p(u)$$

für alle ganzen Zahlwerthe von m und n ist, sondern daß auch, wenn

$$p(u) = p(u_1) \text{ und zugleich } p'(u) = p'(u_1)$$

ist, nothwendig $u_1 - u = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ sein muß. Wir haben ferner

13. $p(\omega_1) = e_1$, $p(\omega_1 + \omega_3) = e_2$ und $p(\omega_3) = e_3$.

Wenn aber nicht für $u = 0$, sondern für $u = u_1$ die Variabele x den Werth ∞ annimmt, so wird

14. $s = p(u - u_1)$ und $\sqrt{R_1(s)} = -p'(u - u_1)$ sein.

Für die Function $p(u)$ besteht nun weiter ein Additionstheorem, nach welchem $p(u+v)$ sich rational durch $p(u)$, $p($ ` und die Ableitungen dieser beiden Functionen nach ihren A gumenten darstellen läßt:

15. $p(u \pm v) = \frac{2[p(u)+p(v)].[p(u).p(v) - {}^1/_4 g_2] \mp p'(u).p'(v) - g_3}{2[p(u)-p(v)]^2}$

Aus dieser Formel folgen leicht die 3 Gleichungen

16. $$p(u+\omega_1)=e_1+\frac{(e_2-e_2)(e_1-e_3)}{p(u)-e_1}, p(u+\omega_2)=e_2+\frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{p(u)-e_3}.$$

$$p(u+\omega_1+\omega_3)=e_2+\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{p(u)-e_2}.$$

In einer allgemein gültigen Reihe wird p(u) dargestellt vermittelst einer neuen Transcendente, die durch σ(u) bezeichnet werden möge, und welche mit p(u) durch die Gleichung

17. $$p(u)=-\frac{d^2}{du^2}\lg\sigma(u)$$

verbunden ist. Diese Function σ(u) soll für u=0 verschwinden, während ihre erste Ableitung für diesen Werth von u gleich 1 wird. Die Function σ(u) ist ebenfalls in einer ähnlichen Potenzreihe wie Nr. 11 darzustellen:

18. $$\sigma(u)=u\left(1-\frac{{}^1/_2 g_2}{5!}u^4-3.\frac{2g_3}{7!}u^6-9.\frac{({}^1/_2 g_2)^2}{9!}u^8\right.$$

$$\left.-18\,\frac{{}^1/_2 g_2.2g_3}{11!}u^{10}-\ldots.\right)$$

Das erste der fehlenden Glieder kann schon positiv, alle folgenden werden stets positiv sein. Diese Function convergirt für alle reellen und complexen Werthe des Arguments. Aber sie ist nicht rein periodisch. Denn es ist

19. $$\sigma(u+2m\omega_1+2n\omega_3)=(-1)^{mn+m+n}\,\sigma(u).\,e^{2(m\eta_1+n\eta_3)(u+m\omega_1+n\omega_3)}$$

wobei η_1 und η_3 statt der Größen

20. $$\frac{\sigma'(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)} \quad \text{resp.} \quad \frac{\sigma'(\omega_3)}{\sigma(\omega_3)}$$

gesetzt sind. Endlich noch ist σ(u) eine ungerade Function.

Die beiden Functionen p(u) und σ(u) sind außerdem auch durch folgende, aus dem Additionstheoreme Nr. 15 abzuleitenden Formeln verbunden:

21. $$\frac{p'(u)}{p(u)-p(v)} = \frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} + \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - 2\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

22. $$\tfrac{1}{2}\frac{p'(u)\mp p'(v)}{p(u)-p(v)} = \frac{\sigma'(u\pm v)}{\sigma(u\pm v)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \mp \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}$$

23. $$\frac{\sigma(u+v).\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)} = p(v)-p(u).$$

Zwischen den, schon durch die Formeln 20. definirten Größen η_1 und η_3 und den Größen ω_1 und ω_3 besteht noch die Relation:

24. $$\omega_3\eta_1 - \omega_1\eta_3 = \tfrac{1}{2}\pi.i$$

(Selbstverständlich bezeichnet i hier wie gewöhnlich den Werth $\sqrt{-1}$).

Endlich werden noch 3 neue Functionen $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \sigma_3(u)$ eingeführt, welche durch die Gleichungen

25. $$\sigma_1(u) = e^{-\eta_1 u}\frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma(\omega_1)},\quad \sigma_3(u) = e^{-\eta_3 u}\frac{\sigma(u+\omega_3)}{\sigma(\omega_3)}$$
$$\sigma_2(u) = e^{-(\eta_1+\eta_3)u}\frac{\sigma(u+\omega_1+\omega_3)}{\sigma(\omega_1+\omega_3)}$$

definirt werden.

Aus der Formel 23. folgt dann

26. $$p(u)-e_1 = \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma^2(u)} \qquad p(u)-e_3 = \frac{\sigma_3^2(u)}{\sigma^2(u)}$$
$$p(u)-e_2 = \frac{\sigma_2^2(u)}{\sigma^2(u)}.$$

Bezeichnet ferner $e_{\alpha\beta}$ die Differenz $e_\alpha - e_\beta$, und setzt man für α und β irgend zwei der indices 1, 2, 3, so ist

27. $$\sigma_\alpha^2(u) - \sigma_\beta^2(u) + e_{\alpha\beta}.\sigma^2(u) = 0;$$

und

$$(e_2-e_3)\sigma_1^2(u) + (e_3-e_1)\sigma_2^2(u) + (e_1-e_2)\sigma_3^2(u) = 0$$

Die Relationen, welche zwischen den Constanten $\sigma(\omega_\alpha)$,

$\sqrt{e}_{\alpha\beta}$ und $e^{\eta_\alpha \omega_\beta}$ (wo das letztere e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet) bestehen, lassen wir unerwähnt. Aber historisch gleichsam wollen wir eine Formel hervorheben, die oft von der höchsten Wichtigkeit ist:

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{R(x)}+\sqrt{R(x_1)}}{x-x_1}+\frac{\sqrt{R(x_1)}+\sqrt{R(x_2)}}{x_1-x_2}+\frac{\sqrt{R(x_2)}+\sqrt{R(x)}}{x_2-x}\right)=$$

$$\frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)}+\frac{\sigma'(u_1-u_2)}{\sigma(u_1-u_2)}+\frac{\sigma'(u_2-u)}{\sigma(u_2-u)}$$

wobei den Werthen x_1, x_2 die Werthe u_1, u_2, correspondiren. Diese Formel vereinfacht sich sehr, wenn x_2 z. B. unendlich wird, oder wenn R(x) nur vom 3. Grade in x ist.

Um nun die Relationen aufzusuchen, welche diese Weierstraßschen Functionen mit den Jacobischen Theta-Functionen verbinden, müssen die Differential-Gleichungen aufgestellt werden, welchen die Quotienten je zweier Sigma-Functionen genügen. Setzen wir (vgl. Nr. 26) $p(u)-e_1=x_1^2$ und bezeichnen wir mit x_2^2 und x_3^2 die beiden analogen Ausdrücke, so ist

$$\left\{\frac{d}{du}(p(u)-e_1)\right\}^2=4.x_1^2\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 \text{ oder}$$

$$\frac{dx_1}{du}=-x_2.x_3.$$

Analog haben wir noch 2 derartige Gleichungen, durch welche die Differentialquotienten von

$$\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}, \quad \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}, \quad \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}$$

3 Producte von zwei Quotienten der anderen Sigmafunctionen gestellt werden. Häufiger indessen und wichtiger sind die Dif-

ferentialgleichungen, in welchen $\sigma_s(u)$ im Nenner der zu differenzirenden Function steht. Diese lassen sich aus den eben entwickelten Gleichungen ableiten. Wenn man nämlich

$\frac{\sigma(u)}{\sigma_s(u)}$ mit x, $\frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}$ mit y und $\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$ mit z bezeichnet, so ist

$x_1 = {}^{y}/_{x_2}$, $x_2 = {}^{z}/_{x}$ und $x_3 = {}^{1}/x$, und es ergiebt sich

$$28 \begin{cases} \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = [1-(e_1-e_3)x^2]\,[1-(e_2-e_3)x^2] \\ \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = [1-y^2]\,[e_1-e_2-(e_3-e_2)y^2] \\ \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = [1-z^2]\,[(e_1-e_3)\,z^2-(e_1-e_2)] \end{cases}$$

Daraus ergiebt sich dann leicht, daß

$$29 \begin{cases} \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}} \cdot \text{sin am } (....)\ (\sqrt{e_1-e_3}\,.\,u) \\ \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \text{cos. am. } (\sqrt{e_1-e_3}\,.\,u) \\ \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \Delta.\ \text{am } (\sqrt{e_1-e_3}\,.\,u) \end{cases}$$

und der modulus $k = \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}$ ist.

Bezeichnen wir ferner

$\frac{u\pi}{2\omega_1}$ mit v und $\frac{\omega_2.\pi.i}{\omega_1}$ mit l.q, so wird

$$30.\ \sigma(u) = \frac{2\omega_1}{\pi} \cdot e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}\cdot v^2} \cdot \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}\,.$$

$$30.\quad \begin{cases} \sigma_1(u) = e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}\cdot v^2} \dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1(0)} \\ \sigma_2(u) = e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2} v^2} \dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)} \\ \sigma_3(u) = e^{\frac{2\omega_1\eta_1}{\pi^2}\cdot v^2} \dfrac{\vartheta(v)}{\vartheta(0)} \end{cases}$$

und

$$31.\quad \begin{cases} \sqrt[4]{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\cdot \vartheta_3(0).\ \vartheta(0) \\ \sqrt[4]{(e_1-e_2)(e_2-e_3)} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\ \vartheta(0).\ \vartheta_2(0). \\ \sqrt[4]{(e_1-e_3)(e_2-e_3)} = \dfrac{\pi}{2\omega_1}\ \vartheta_2(0)\ \vartheta_3(0). \end{cases}$$

Die hier mit ϑ, ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3 bezeichneten Functionen sind die von Jacobi durch seine elementa nova etc. eingeführten Thetafunctionen.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß man hat

$$\sqrt{e_1-e_3}\ .\ \omega_1 = K \text{ und } \sqrt{e_1-e_3}\ .\ \omega_3 = i.K'$$

K und K′ in dem Jacobischen Sinne genommen.

Mit Hülfe der Weierstraßschen Functionen p (u) und σ (u) lassen sich also die elliptischen Differentialgleichungen integriren, indem die Variabele x als Function der Variabeln u dargestellt wird. Häufig hat man aber auch die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich u als Function von x darzustellen. Dies kann auf folgende Weise bewerkstelligt werden.

Wir definiren die 4 Functionen P (s, ω_1), Q (s, ω_2), P (s, ω_3) und Q (s, ω_3) wo s zur Abkürzung für die Function p (u) steht, durch die Gleichungen

32 $\begin{cases} P(s,\omega_1) = \frac{1}{2}(e^{v_1} + e^{-v_1}),\ P(s,\omega_2) = \frac{1}{2}(e^{v_2} + e^{-v_2}) \\ \sqrt{R_1(s)} \cdot Q(s,\omega_1) = \frac{1}{2}(e^{v_1} - e^{-v_1}),\ \sqrt{R_1(s)} \cdot Q(s,\omega_2) \\ = \frac{1}{2}(e^{v_2} - e^{-v_2}) \end{cases}$

und zwar hat v_1 den Werth

33. $2\eta_1 u - 2\omega_1 \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ und v_2 den Werth $2\eta_2 u - 2\omega_2 \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$

Selbstverständlich sind die hier eingeführten Werthe von s, $\sqrt{R_1(s)}$ und u zusammengehörigen Werthe, so daß $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = R_1(s)$ ist. Aus den Gleichungen 32. und 33. ergiebt sich leicht der Werth von u, nämlich es ist

34. $u = \frac{\omega_2}{\pi i}$ lg. nat. $[P(s,\omega_1) + \sqrt{R_1(s)} \cdot Q(s,\omega_1)]$

$$- \frac{\omega_1}{\pi i} \text{ lg. nat. } [P(s,\omega_2) + \sqrt{R_1(s)} \cdot Q(s,\omega_2)]$$

Mit Rücksicht darauf, daß für $u = \omega_2$ die Function v_1 verschwindet, und $s = e_1$ wird, hat man

35. $P(s,\omega_1) = 1 + A_1(s-e_1) + A_2(s-e_1)^2 + \ldots\ldots$

Weil aber für $s = e_1$ auch $R_1(s)$ verschwindet, so kann in der Reihe für $Q(s,\omega_1)$ das constante Glied nicht 1 sein. Wir werden schreiben:

36. $Q(s,\omega_1) = B_0 + B_1(s-e_1) + B_2(s-e_1)^2 + \ldots$

Die Coefficienten A und B sind rationale Functionen von e_1, g_2, η_1 und ω_1. Unter der Voraussetzung von $A_0 = 1$, und daß jede Größe A oder B mit negativem index den Werth 0 habe, gelten für alle ganzen Zahlwerthe von ν die Recursions-Formeln:

37. $\begin{cases} (\nu+1)\ A_{\nu+1} = (2\eta_1 + e_1\omega_1)\ B_\nu + 2\omega_1 B_{\nu-1} \text{ und} \\ 2(\nu+3)(6e_1^2 - \frac{1}{2}g_2) B_{\nu+1} = 4[\frac{(\eta_2 + e_2\omega_2)^2}{\nu+1} - 3(\nu+1)e_1^2]b \end{cases}$

$$+(2\nu+1)[4\omega_1 \frac{\eta_1+e_1\omega_1}{\nu(\nu+1)}-2]B_{\nu-1}+\frac{4\omega_1}{\nu}\cdot B_{\nu-2}$$

Geht ω_1 in ω_3 über, so muß gleichzeitig η_1 in η_3 und e_1 in e_3 verwandelt werden. Und somit geben die Formeln 35, 36 und 37 zugleich auch die Entwicklung von $P(s,\omega_3)$ und $Q(s,\omega_3)$.

Damit ist denn auch die Aufgabe gelöst, den Werth des Argumentes u zu finden, wenn der von der Function p (u) und ihrer ersten Ableitung $p'(u) = -\sqrt{R_1(s)}$ gegeben ist.

§. 3.

Wir kommen nun zur analytischen Lösung unseres Problems.

Der Einfachheit wegen möge das kleine Gewicht, welches auf dem innersten Ringe des Apparates befestigt werden kann, die Gestalt eines Cylinders haben, der auf dem Ringe so fest gemacht wird, daß die Richtung seiner Achse mit derjenigen der Kugelachse zusammenfällt. Der Schwerpunkt des Uebergewichtes liegt dann also auf der Rotationsachse.

In der folgenden Rechnung werden wir ferner folgende Abkürzungen gebrauchen:

1. Die Massen der Kugel, der durch dieselbe hindurchgesteckten Rotationsachse und des kleinen, cylindrischen Gewichtes mögen mit μ_1, μ_2, μ_3 resp. bezeichnet werden. Die Summe dieser 3 Massen heiße M.

2. λ_1 soll die Entfernung des Schwerpunkts des Cylinders μ_3 und 1 die des Schwerpunktes der Masse M vom Kugelmittelpunkt bezeichnen.

3. Wir wählen 2, in der Aequatorebene auf einander senkrecht stehende Durchmesser der Kugel und die Rotationsachse als Trägheitsachsen des Systems der 3 Körper. Die Trägheits-Momente nach den beiden ersten Achsen werden für alle 3 Körper einzeln einander gleich, weil wir alle 3 Körper als Rotations-Körper betrachten können, deren gemeinschaftliche Achse die Achse der rotirenden Kugel ist. Deshalb sind die 3 angenommenen Trägheits-Achsen zugleich auch Hauptträgheits-Achsen des Systems der 3 Körper. Die Summe der 3 Trägheitsmomente der Körper nach einer der Achsen giebt das Trägheits-Moment des ganzen Systems nach dieser Achse. Wir werden die Trägheitsmomente des Systems der 3 Körper nach den beiden ersteren Achsen mit A und nach der dritten Achse mit C bezeichnen.

4. g gebe die Größe der Erdschwere an.

5. ω sei der Neigungswinkel der Rotations-Achse gegen den Horizont vor Beginn der Rotation.

Wir wählen den Kugelmittelpunkt als Coordinaten-Anfangspunkt und eine von hieraus im Sinne der Schwerkraft gezogene Gerade als positive Achse des z. Ferner legen wir durch den Anfangspunkt eine horizontale und eine zur Rotations-Achse senkrechte Ebene, die Durchschnittslinie beider Ebenen sei die Achse der x, eine in der horizontalen Ebene, senkrecht zur letzteren Achse gezogene Gerade die Achse der y.

Mit diesem im Raume festen Coordinaten-System verbinden wir ein anderes rechtwinkliges System mit demselben Anfangspunkte, das in der Kugel fest ist. Wir wählen d Rotations-Achse als z_1-Achse, die Durchschnittslinie d Aequatoreal-Ebene der Kugel mit der horizontalen Eben d. h. die Linie Ox, sofern sie in der Kugel, nicht aber i

Raume feſt iſt, als Achſe der poſitiven x_1, und die in der Aequatoreal-Ebene zu Ox_1 ſenkrecht gezogene Gerade Oy_1 als dritte Coordinaten-Achſe. Die augenblickliche Lage des beweglichen Syſtems (und damit auch die der Kugel) kann beſtimmt werden, indem man entweder die coss. der 9 Winkel zwiſchen den beiden Achſenſyſtemen in Rechnung bringt; man bezeichnet zu dem Zwecke die coss. mit Buchſtaben, indem man ſetzt:

$$\cos(x,x_1)=a,\ \cos(y,x_1)=a',\ \cos(z,x_1)=a''\ \text{und}$$

analog b,b',b'',c,c',c''. Oder man wendet die Euler-Transformationsformeln an, indem man nur 3 Winkel, φ, χ, ψ einführt. Zur Entwickelung der Differential-Gleichungen der Bewegung iſt die erſte Bezeichnungs-Art, zur Integration aber die letztere vorzuziehen. Und zwar iſt φ der Bogen des Aequators der Kugel, welcher durch die bewegliche Durchſchnittslinie der horizontalen und der Aequatorebene und den in der Kugel feſten Radius Ox_1 ausgeſchnitten wird. Er wird von jener Linie an gezählt und hat alſo für den Anfangs-Moment der Bewegung den Werth 0. Der zweite Winkel, χ, giebt die Neigung der horizontalen Ebene zu der Aequatoreal-Ebene an; es iſt alſo χ der Neigungswinkel zwiſchen der Verticalen und der Rotations-Achſe, deſſen Anfangs-Werth $\pi/_2 - \omega$ (vgl. Nr. 5 S. 18) iſt. Endlich ψ iſt der Bogen des durch die horizontale Ebene beſtimmten größten Kreiſes der Kugel zwiſchen dem feſten Radius Ox und der beweglichen Durchſchnittslinie der horizontalen und der Aequatoreal-Ebene; ſein Anfangs-Werth iſt 0. Er ſoll in dem Falle (den wir nachher vorausſetzen), daß der Schwerpunkt des ganzen Maſſenſyſtems M auf der Achſe der poſitiven z_1 liegt, und daß φ von Ox nach der poſitiven

y_1-Achse hin gezählt wird, von Ox aus nach der Achse der negativen y gerechnet werden.

Nach dem Principe von d'Alembert müssen die gegebenen Kräfte mit denen, welche den wirklich wirksamen Kräften gleich und entgegengesetzt sind, im Gleichgewichte sein. Bezeichnen wir also mit X, Y, Z die Componenten der auf jedes Theilchen dm der Masse M wirkenden Kräfte, bezogen auf das im Raume feste Achsensystem, so müssen die Kräfte

$$(X - \frac{d^2x}{dt^2})\,dm,\ (Y - \frac{d^2y}{dt^2})\,dm,\ (Z - \frac{d^2z}{dt^2})\,dm$$

im Gleichgewichte sein. Von den 6 Bedingungs-Gleichungen für den völlig freien Körper fallen hier, weil ein Punkt, nämlich der Mittelpunkt der Kugel, fest ist, drei weg; damit in dem vorliegenden Falle jene Kräfte im Gleichgewicht sind, genügen die 3 Bedingungs-Gleichungen, daß die Componenten des resultirenden Kräftepaares verschwinden, für alle Massentheilchen dm. Es muß also sein:

$$1.\ \int [y(\frac{d^2z}{dt^2} - Z) - z(\frac{d^2y}{dt^2} - Y)]\,dm = 0$$

und analog noch 2 andere Gleichungen, in denen y mit z und x, z mit x und y vertauscht worden ist. Jetzt müssen die wirksamen Kräfte, d. h. die 2. Differential-Quotienten der Coordinaten x y z nach der Zeit t, auf das im Körper feste Achsensystem bezogen werden. Wir setzen also

$$x = a x_1 + b y_1 + c z_1 \quad y = a' x_1 + b' y_1 + c' z_1$$
$$z = a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1.$$

Dann ist

$$2.\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cdot x_1 + \frac{db}{dt} y_1 + \frac{dc}{dt} z_1 \\ dy = da'.\ x_1 + db'.\ y_1 + dc'.\ z_1 \\ dz = da''.\ x_1 + db''.\ y_1 + dc''.\ z_1. \end{cases}$$

Wir bleiben hier in der Entwickelung einen Augenblick stehen, um 3 Größen p, q, r, einzuführen, die uns später von wesentlichem Nutzen sein werden. Es ist nämlich

$$a.\ dx + a'\ dy + a''.\ dz =$$
$$(a.\,db + a'\,db' + a''db'')\,y_1 + (a.dc + a'.dc' + a''.dc'').\,z_1$$

oder wenn wir

$$3.\quad \begin{cases} a.\ \frac{db}{dt} + a'.\ \frac{db'}{dt} + a''.\ \frac{db''}{dt} \text{ mit } -r \text{ und} \\ a.\ \frac{dc}{dt} + a'.\ \frac{dc'}{dt} + a''.\ \frac{dc''}{dt} \text{ mit } +q \text{ bezeichnen} \end{cases}$$

$$4.\quad a.\ \frac{dx}{dt} + a'.\ \frac{dy}{dt} + a''.\ \frac{dz}{dt} = -\,r.y_1 + q.z_1.$$

Analog ergiebt sich, wenn man

$$3^a\quad b.\ \frac{dc}{dt} + b'.\ \frac{dc'}{dt} + b''.\ \frac{dc''}{dt} \text{ mit } -\,p \text{ bezeichnet und}$$

berücksichtigt, daß die Größen p, q, r ihr Zeichen wechseln, wenn man in jeder ihrer Definitions-Gleichungen eine Vertauschung der nach t differenzirten Größe mit der vor dem Differentialquotienten stehenden Größe vornimmt, daß also z. B.

$$c.\ \frac{db}{dt} + c'.\ \frac{db'}{dt} + c''.\ \frac{db''}{dt} = p \text{ ist (es folgt dies}$$

us den zwischen den 9 Größen a, a', a'' u. s. w. bestehenden 3 Bedingungs-Gleichungen), daß

5. $b.\frac{dx}{dt} + b'.\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt} = rx_1 - pz_1$ und

6. $c.\frac{dx}{dt} + c'.\frac{dy}{dt} + c''.\frac{dz}{dt} = py_1 - qx_1$ ist.

Berechnet man hieraus durch Quadrirung und Addirung der 3 Gleichungen das Quadrat der Geschwindigkeit v, so kann man zeigen, daß die Größen p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit der Rotations-Achse sind, bezogen auf die im Körper festen Achsen.

Es ergiebt sich aber auch eine weitere Vereinfachung der Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dz}{dt}$ durch Einführung der Größen p, q, r. Es ist nämlich

7. $\frac{da}{dt} = br - cq$, $\frac{db}{dt} = cp - ar.$, $\frac{dc}{dt} = aq - bp$

und analog für die 6 anderen Differentialquotienten. Und daher ist

8. $\frac{dx}{dt} = a.(q.z_1 - r.y_1) + b(r.x_1 - p.z_1) + c(p.y_1 - q.x_1)$

9. $\frac{dy}{dt} = a'(qz_1 - r.y_1) + b'(r.x_1 - p.z_1) + c'(p.y_1 - q.x_1)$

10. $\frac{dz}{dt} = a''(q.z_1 - ry_1) + b''(r.x_1 - p.z_1) + c''(p.y_1 - qx_1).$

Diese 3 Gleichungen sind nach t zu differenziren. Führt man die Werthe für die Ableitungen der 9 coss., wie sie oben bestimmt sind, ein und setzt man

11. $z_1.\frac{dq}{dt} - y_1.\frac{dr}{dt} + q.(p.y_1 - qx_1) - r.(rx_1 - p.z_1) =$

12. $x_1.\frac{dr}{dt} - z_1.\frac{dp}{dt} + r.(q.z_1 - r.y_1) - p(p.y_1 - q.x_1) =$

13. $y_1 \cdot \frac{dp}{dt} - x_1 \cdot \frac{dq}{dt} + p\,(r.x_1 - p.z_1) - q(q.z_1 - r.y_1) = M$

so findet man

14. $\frac{d^2x}{dt^2} = a.K + b.L + c.M$

15. $\frac{d^2y}{dt^2} = a'.K + b'.L + c'.M$

16. $\frac{d^2z}{dt^2} = a''.K + b''.L + c''.M.$

Diese Werthe sind in die oben aufgestellten Gleichungen (Nr. 1)

$$\int [y(\tfrac{d^2z}{dt^2} - Z) - z(\tfrac{d^2y}{dt^2} - Y)]\,dm = 0$$ u. s. w, die wir auch in der Gestalt

17. $$\int [y\,\tfrac{d^2z}{dt^2} - z.\,\tfrac{d^2y}{dt^2})\,dm = -\int [z.\,Y - y.\,Z]\,dm$$

(und analog noch 2 andere) schreiben können, einzuführen.

Der Uebersichtlichkeit der Formeln halber führen wir noch einige Abkürzungen ein, indem wir setzen

18. $$\int \left\{z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right\} dm = U = \int [zY - yZ]\,dm$$

19. $$\int \left\{x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2}\right\} dm = V = \int [xZ - zX]\,dm$$

20. $$\int \left\{y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right\} dm = W = \int [yX - xY]\,dm.$$

Dann ist

$$\int [L.z_1 - My_1]\,dm = a.U + a'.V + a''.W$$
$$\int [Mx_1 - K.z_1]\,dm = b.U + b'.V + b''.W$$
$$\int [K.y_1 - Lx_1]\,dm = c.U + c'.V + c''.W.$$

Nun ist aber auch

$$24.\quad L.z_1 - M.y_1 = (p.q + \frac{dr}{dt}).x_1.z_1 - (p.r - \frac{dq}{dt}).x_1y_1$$
$$+ (q^2 - r^2)\, y_1 z_1$$
$$-(qr + \frac{dp}{dt})y_1^2 + (qr - \frac{dp}{dt}z_1^2.$$

Nach den auf pag. 18 sub Nr. 3 gemachten Auseinandersetzungen sind die Coordinaten-Achsen der x_1, y_1, z_1 zugleich auch die 3 Hauptträgheits-Achsen des mit M bezeichneten Massensystems. Wird also vorstehende Gleichung mit dm multiplicirt und über alle Theilchen dm der Masse M integrirt, so müssen die mit den Producten x_1y_1, x_1z_1, y_1z_1 behafteten Glieder wegfallen, und man erhält:

$$25.\quad \int [\, L.\, z_1 - M.\, y_1\,]\, dm =$$
$$-(qr + \frac{dp}{dt}) \int y_1^2 dm + \left(qr - \frac{dp}{dt}\right) \int z_1^2.\, dm.$$

Wir wissen aber schon, daß die Hauptträgheitsmomente die Größen A, A und C haben, daß also

$$26.\quad \begin{cases} A = \int (y_1^2 + z_1^2)\, dm = \int (x_1^2 + z_1^2)\, dm \\ C = \int (x_1^2 + y_1^2)\, dm \text{ ist.} \end{cases}$$

Man findet nun sehr leicht, daß

$$27.\quad \int [\, L.\, z_1 - M.\, y_1\,]\, dm = q.r\ (A - C) - \frac{dp}{dt}.\ A$$

ist.

Behandelt man die beiden anderen Gleichungen eben, so ergiebt sich

28. $\int [M.x_1 - K.z_1]\, dm = p.r(C-A) - \frac{dq}{dt}.\ A$

29. $\int [K.y_1 - L.x_1]\, dm = \qquad\qquad - \frac{dr}{dt}.\ C.$

Wir haben also jetzt gefunden, daß die Gleichungen, auf welche unsere Aufgabe führt, lauten:

30. $q.r(A-C) - A\,\frac{dp}{dt} = a.\ U + a'.\ V + a''.W$

31. $p.r(C-A) - A.\ \frac{dq}{dt} = b.\ U + b'.\ V + b''.W$

32. $\qquad - C\ .\ \frac{dr}{dt} = c.\ U + c'.\ U + c''.W.$

Auf das System M wirkt einzig die Schwerkraft, deren Größe mit g bezeichnet worden ist, im Sinne der positiven z-Achse. Es ist also:

33. $\qquad X = Y = 0,\ Z = g.$

Daraus folgt, daß

33a. $U = -g.\int y.dm,\quad V = g.\int x.dm,\ W = 0$

ist. Es wird also

34. $a.\ U + a'.\ V + a''.\ W = -a\,g.\int y\,dm + a'.g\int x dm.$

Führen wir die Coordinaten x_1, y_1, z_1 ein, so wird

34a. $a.U + a'.V + a''.W = g\int [(a'b - ab')y_1 + (a'c - ac')z_1]dm$

$$= -\ g.\int (c''.y_1 - b''.z_1).\ dm.$$

Der Schwerpunkt der Masse $M = \int dm$ liegt auf der Rotations-Achse, wie aus den auf S. 17 gemachten Annahmen hervorgeht; seine Entfernung vom Kugel-Mittelpunkte O, dem Coordinaten-Anfangspunkte, ist l. Also ist

35. $\int x_1 . dm = 0, \int y_1 . dm = 0, \int z_1 . dm = M . l.$

Daher wird

36. $a . U + a' . V + a'' . W = M . g . l . b''.$

Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich

36a $\begin{cases} b . U + b' . V + b'' . W = -M . g . l . a'' \text{ und} \\ c . U + c' . V + c'' . W = 0. \end{cases}$

Die beiden coss, a'' und b'', sind nun noch mit Hülfe der Winkel φ, χ, ψ zu eliminiren Nach unseren Annahmen wird

37. $a'' = -\sin \varphi . \sin \chi$ und $b'' = -\cos \varphi . \sin \chi.$

Demnach sind die 3 Differentialgleichungen der Bewegungen des Systems M:

38. A. $\frac{dp}{dt} = qr . (A - C) + Mgl . \sin \chi . \cos \varphi$

39. A. $\frac{dq}{dt} = p . r (C - A) - Mgl . \sin \chi . \sin \varphi$

40. C. $\frac{dr}{dt} = 0.$

Zu diesen 3 Gleichungen sind natürlich noch die 3 Definitions-Gleichungen für p, q, r (vgl. S. 21, Nr. 3) hinzuzurechnen. In diesen kommen aber noch die coss. der 9 Richtungswinkel, nämlich a, a', a'' u. s. w, so wie deren Differentialquotienten nach t vor. Bevor wir an die Lösung der obigen Differential-Gleichungen gehen können, müssen wir diese Größen noch durch die 3 Winkel φ, χ, ψ ausdrücken. Man differenziirt zu diesem Zwecke die 6 ersten der Gleichungen, welche zwischen den 9 coss. und den tri

metrischen Functionen der 3 Winkel φ, χ, ψ bestehen, und setzt die für die Differentialquotienten von a,a,'a,''b,b' und b'' (nach t genommen) gefundenen Werthe in die Definitionsgleichungen für p q r ein. Das Verfahren ist zu einfach, als daß es weiter ausgeführt zu werden brauchte. Man erhält

41. $p = \sin\varphi . \sin\chi . \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi . \frac{d\chi}{dt}$

42. $q = \cos\varphi . \sin\chi . \frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi . \frac{d\chi}{dt}$

43. $r = \frac{d\Phi}{dt} - \cos\chi . \frac{d\psi}{dt}$.

Diese 3 Gleichungen in Verbindung mit den obigen 3 Differentialgleichungen bestimmen die Bewegungen der Kugel und der Achse des Bohnenbergerschen Apparates. Mit der Integration dieser 6 Gleichungen ist die Lösung unseres Problemes gewonnen.

Aus den Gleichungen 41 und 42 wird durch Elimination von $d\psi$ erhalten:

$$(p . \cos\varphi - q . \sin\varphi) . dt = -d\chi .$$

Und aus 38 und 39 durch Elimination von C erhält man:

$$A (p . dp + q . dq) = Mgl (p . \cos\varphi - q . \sin\varphi) \sin\chi . dt.$$
$$= - Mgl . \sin\chi . d\chi .$$

Durch Integration findet man hieraus:

$$A (p^2 + q^2) = 2 Mgl . \cos\chi + m$$

m eine Integrationsconstante ist.

Eliminirt man aber aus den Gleichungen 38 und 39

die Größe M, so giebt diese Operation

$$A\,(\sin\varphi.\,dp + \cos\varphi.\,dq) + (A—C)(p.\,\cos\varphi — q.\,\sin\varphi)\;r.\,dt = 0.$$

Diese Gleichung wird mit $\sin\chi$ multiplicirt, und $Apq\cos\chi\,dt$ wird auf der linken Seite addirt und subtrahirt. Setzt man:

$$Cr.\,(p.\cos\varphi - q.\,\sin\varphi)\,dt = -\,Cr.\,d\chi,$$ so erhält man:

$$A\,[\sin\varphi.\sin\chi.\,dp + \cos\varphi.\sin\chi.\,dq + p(r.\cos\varphi.\sin\chi + q.\cos\chi)\,dt - q(p.\cos\chi + r.\sin\varphi.\sin\chi).\,dt] + Cr.\sin\chi.\,d\chi = 0.$$

Wenn man aber aus Gleichung 42 und 43 $d\psi$ eliminirt, so findet man, daß ist:

$(r.\cos\varphi.\sin\chi + q.\cos\chi)\,dt = d.\,(\sin\varphi.\sin\chi)$ und $(p.\cos\chi + r.\sin\varphi.\sin\chi)\,dt = -\,d.\,(\cos\varphi.\sin\chi)$.

Diese letztere Gleichung ergiebt sich durch Elimination von $d\psi$ zwischen Nr. 41 und 43. Daher muß auch

$$A\,[\sin\varphi.\sin\chi.\,dp + \cos\varphi.\sin\chi.\,dq + p.\,d(\sin\varphi.\sin\chi) + q.\,d(\cos\varphi.\sin\chi)] + Cr.\sin\chi.\,d\chi = 0$$

sein. Diese Differential-Gleichung kann gliedweise integrirt werden. Wird die Constante, welche sich bei dieser unbestimmten Integration ergiebt, mit n bezeichnet, so wird

45. $A\,(p.\sin\varphi.\sin\chi + q.\cos\varphi.\sin\chi) - Cr.\cos\chi =$

Endlich folgt noch durch Integration der Gleichung 40, daß

46. $$Cr = k$$

ist, wo k eine dritte Integrations-Constante bezeichnet.

Ehe wir weiter gehen, ist es zweckmäßig, diese 3 Integrations-Constanten näher zu betrachten.

Zunächst ergiebt sich aus der Gleichung 46, daß die Größe r von der Zeit t unabhängig, für die Zeit also eine Constante ist.

Aus der Gleichung 43 ersehen wir, daß der Zuwachs von φ, nämlich $d\varphi$, aus 2 Theilen besteht, deren erster dem Zuwachs der Zeit, dt, proportional ist (denn r ist constant) und deren zweiter der Projection des Zuwachses von ψ auf die Aequatorebene der Kugel (nämlich $\cos\chi \cdot d\psi$) gleich kommt. Denn der Winkel φ liegt in der letztgenannten Ebene und wird von der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der horizontalen Ebene an gerechnet; der Winkel ψ liegt in der horizontalen Ebene und wird von einem fixirten Punkte an bis zu dem Endpunkte der genannten Durchschnittslinie gezählt. Ob man diese beiden Theile, aus denen $d\varphi$ besteht, zu addiren oder zu subtrahiren hat, ist gleichgültig. Jedenfalls geht aus der Bestimmung, wie der Winkel φ zu messen ist, hervor, daß er wächst erstens durch die Rotation der Kugel, welche um eine zu der Ebene des Bogens φ senkrechte Achse erfolgt, und zweitens durch die Bewegung der Durchschnittslinie der beiden Ebenen der Winkel φ und ψ. Denken wir uns nun den Punkt, wo diese Durchschnittslinie zur Zeit $t=0$ den equator der Kugel schneidet, in der Weise markirt, daß er ch auf dem Aequator stets mit der entgegensetzten Geschwingkeit bewegt, als mit der die Kugel rotirt, dann wird des Mal, wenn die Projection des Bogens ψ auf die Aequa-

vorebene gleich wird dem Bogen des Aequators von der Durchschnittslinie bis zu jenem markirten Punkte, der durch die Rotation der Kugel hervorgebrachte Zuwachs von φ gleich r. dt sein; und da die Rotations-Geschwindigkeit nahezu constant ist, also der Zeit proportional wächst, so muß in dem gedachten Falle die Rotations-Geschwindigkeit gleich r sein. Der Fall tritt ein im Anfangsmoment der Bewegung; denn dann ist ψ erst um eine so kleine Größe $d\psi$ gewachsen, daß wir dieselbe vernachlässigen können. Bekanntlich aber wird für jeden Zeitmoment t die Winkelgeschwindigkeit dargestellt durch $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$; im Anfangsmoment muß also $p^2+q^2=0$ sein, während r gleich der Rotations-Geschwindigkeit wird.

Aus Gleichung 44 folgt also, daß

$$m = -2\,\mathrm{Mgl.}\,\sin\omega$$ ist.

Der Neigungswinkel der Rotations-Achse zur positiven z-Achse ist endlich gegeben durch

$$\cos\chi = \frac{a''p + b''q + c''r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

oder durch

$$\cos\chi = \frac{p.\sin\varphi.\sin\chi + q.\cos\varphi.\sin\chi + r.\cos\chi}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Ersetzen wir χ durch $\pi/_2 - \omega$ und benutzen wir Gleichung 45, so ergiebt sich die Constante

$$n = -\mathrm{Cr.}\cos(\pi/_2 - \omega) = -\mathrm{Cr.}\sin\omega.$$

Endlich da r gegeben sein muß, und C berechnet werden kann, so ist k bekannt.

Aus den Gleichungen 40, 41 und 44 folgt:

$$A\,[\sin^2\chi\,(d\psi)^2 + (d\chi)^2] = 2\,\mathrm{Mgl}\,(\cos\chi - \sin\omega)\,dt$$

und auf ganz ähnliche Weise erhält man aus den Gleichungen 40, 41 und 45

46a $$A.\sin^2\chi.\,d\psi = \mathrm{Cr.}\,(\cos\chi - \sin\omega).\,dt.$$

Jetzt eliminirt man zwischen den letzten beiden Gleichungen $d\psi$. Das Resultat wird:

$$47.\quad dt = \pm \frac{A.\ \sin\chi.\ d\chi}{\sqrt{(\cos\chi - \sin\omega)\,(2\,A\,Mgl.\,\sin^2\chi - C^2r^2\,(\cos\chi - \sin\omega))}}$$

Diese Differentialgleichung zwischen t und χ ist zu integriren. Wie man sofort sieht, ist sie eine elliptische. Die Entscheidung über das Vorzeichen der Quadratwurzel mag noch offen bleiben. Zur bequemeren Uebersicht ersetzen wir die Variabele χ durch die neue Variable $\cos\chi$ oder x; wir erhalten dadurch:

$$dt = \mp \frac{dx}{\lambda\sqrt{(x - \sin\omega)\,(1 - x^2 - \frac{C^2r^2\,(x - \sin\omega)}{2\,A\,Mgl.})}}$$

λ ist hier zur Abkürzung für $\sqrt{\frac{2\,Mgl.}{A}}$ gesetzt. Aus gleichem Grunde werde die Größe

$$C^4r^4 + 8.\ AMgl.\ C^2r^2\sin\omega + 16\ A^2M^2g^2l$$

mit D und

$$48.\quad \frac{\sqrt{D} - C^2r^2}{4\,AMgl.} \text{ mit } \alpha \text{ u. } \frac{\sqrt{D} + C^2r^2}{4\,AMgl.} \text{ mit } \gamma,$$

so wie $\sin\omega$ mit β bezeichnet. Es ist dann nämlich

$$1 - x^2 - \frac{C^2r^2}{2AMgl.}\,(x - \sin\omega) = (\alpha - x)\,(x + \gamma);$$

und mithin muß

$$49.\quad dt = \mp \frac{dx}{\lambda\sqrt{(\alpha - x)\,(x - \beta)(x + \gamma)}}$$

sein. Die Function, welche im Nenner unter dem Wurzelzeichen steht, ist an und für sich schon vom 3. Grade; aber sie enthält noch das Quadrat der Variabeln. Eine Transforma-

tion ist also nothwendig; und zwar ist der Specialfall, der oben S. 8 unter Nr. 8 besprochen wurde, von Bedeutung für unsere Function. Was zunächst die Gränzen der Variabele x anlangt, so können dieselben sein $\alpha \ldots \beta$ oder aber $-\gamma \ldots -\infty$. Die Variabele x kann aber nur in dem ersten Intervall liegen, weil ihr Werth stets kleiner als 1 sein muß. Und in der That, wir wissen bereits, daß zur Zeit $t = 0$ unsere Variabele x den Werth β annimmt. In einer gewissen Zeit, deren Dauer wir T nennen wollen, wird x alle Werthe zwischen β und α durchlaufen, und zwar dergestalt, daß $t=T$ und $x=\alpha$ entsprechende Werthe sind. Da aber $\alpha > \beta > -\gamma$ ist, so wächst x in der Zeit T von β bis α, während t von 0 bis T zunimmt. In den Gleichungen 47 und 49 muß mithin das untere Vorzeichen stehen.

Setzen wir nach Gleichung Nr. 8 S. 8

$$50.\quad x=\beta+{}^1\!/_4\,\frac{R'(\beta)}{s-{}^1\!/_{24}R''(\beta)},$$

so wird s unendlich, wenn x seinen Anfangswerth β, die Variable t also den Werth 0 hat. Nach Gleichung 10 ist mithin $s=p(\lambda t)$ und

$$x-\beta = {}^1\!/_4\frac{R'(\beta)}{p(\lambda t)-{}^1\!/_{24}R''(\beta)}.$$

p ist hier natürlich Functionszeichen. Nach Einführung der Werthe von $R'(\beta)$ und $R''(\beta)$ ergiebt sich der Werth von $\cos\chi$

$$51.\quad \cos\chi-\sin\omega = {}^3\!/_4\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{p(\lambda t)-{}^1\!/_{12}(\alpha-2\beta+\gamma)}$$

Es ist jedoch zu beachten, daß vorläufig diese Gleichung nur so lange gilt, als t in dem Intervalle 0 bis T liegt.

Wenn aber x den Werth α annimmt, so ergiebt sich au

Nr. 50 $s = {}^1/_{12}\,\alpha + {}^1/_{12}\,\beta + {}^1/_6\,\gamma$. Würde ferner x die Werthe $= \infty$ oder $-\gamma$ erhalten können, so würden die entsprechenden Werthe von s sein:

${}^1/_{12}\,\alpha - {}^1/_6\,\beta - {}^1/_{12}\,\gamma$ und $-{}^1/_6\,\alpha + {}^1/_{12}\,\beta - {}^1/_{12}\,\gamma$.

Da aber nach Gleichung 50 die Ableitung von x nach s negativ ist, so können x und s nicht gleichzeitig wachsen oder gleichzeitig abnehmen. Durchläuft also x stetig wachsend die Werthe

$$\beta \ldots \alpha \ldots + \infty$$
$$-\infty \ldots -\gamma \ldots \beta$$

so muß s, da dem $x = \beta$ der Werth ∞ für s und dem $x = \alpha$ der Werth ${}^1/_{12}\,\alpha + {}^1/_{12}\,\beta + {}^1/_6\,\gamma$ entspricht, stetig abnehmend die Werthe

$$+\infty \ldots e_1 \ldots e_2 \ldots e_3 \ldots -\infty$$

durchlaufen; e_1, e_2, e_3, bezeichnen hier die Wurzeln der Gleichung $R_1(s) = 0$, wenn man $R_1(s)$ die an Stelle von R (x) in Nr. 49 tretende Function in s nennt (vgl. hierzu oben Nr. 5 u. 6). Daraus folgt denn, daß

$$\begin{aligned} {}^1/_{12}\,\alpha + {}^1/_{12}\,\beta + {}^1/_6\,\gamma &= e_1 \\ {}^2/_{12}\,\alpha - {}^1/_6\,\beta - {}^1/_{12}\,\gamma &= e_2 \\ -{}^2/_6\,\alpha + {}^1/_{12}\,\beta - {}^2/_{12}\,\gamma &= e_3 \end{aligned} \qquad 52.$$

ist.

Jetzt setzen wir in Nr. 50 $x = \alpha$; dann muß $s = e_1$ werden; zugleich geht t in T über, so daß $p(\lambda T) = e_1$ wird. Nach Nr. 13 ist also λT ein ungerades Vielfache von , etwa $\lambda T = \omega_1$.

Beachten wir jetzt, daß im Nenner der Gleichung 51 Differenz

$$p(\lambda t) - {}^2/_{12}\,(\alpha - 2\,\beta - \gamma) = p(\lambda t) - e_2$$

steht, so läßt sich der Werth von $\cos\chi - \sin\omega$ noch erheblich umgestalten. Der Zähler nämlich, $^1/_4 (\alpha-\beta)(\beta+\gamma)$, kann sehr leicht durch die Größen e_1, e_2, e_3, ausgedrückt werden $= 4 (e_1-e_2)(e_2-e_3)$. Und unter Zuhülfenahme von Gleichung 16 wird (vergl. S. 11)

$$\cos\chi - \sin\omega = 4 [e_2 - p (\lambda t + \omega_2 + \omega_3)]$$

oder nach Nr. 26 S. 12

$$\cos\chi - \sin\omega = -4 \frac{\sigma_2^2 (\lambda t + \omega_2 + \omega_3)}{\sigma^2 (\lambda t + \omega_2 + \omega_3)}$$

Indessen kann diese Formel auch noch weiter umgeformt werden. Man kann nämlich $\sigma_2 (\lambda t + \omega_1 + \omega_3)$ als σ-Function ohne index und $\sigma (\lambda t + \omega_2 + \omega_3)$ als σ-Function mit dem index 2 darstellen; dann fällt auch das negative Vorzeichen weg, und man erhält:

53. $$\cos\chi - \sin\omega = 4 \frac{\sigma^2 (\lambda t)}{\sigma_2^2 (\lambda t)} (e_1-e_2)(e_2-e_3).$$

Genau dieselbe Formel hätte man mit einem Schlage aus der Formel 51 unter Zuhülfenahme von Formel 26 S. 12 ableiten können.

Aber vorläufig gilt auch Formel 53 nur, so lange t den Werth T nicht übersteigt. Wächst aber t über T hinaus, von T bis 2T, so haben wir nur das Argument λt um ω_x zu vermehren, d. h. wir lassen t wieder von 0 bis T wachsen, schreiben aber $\omega_x + \lambda t$ statt λt. Dann durchläuft $\cos\chi$ dieselben Werthe wie vorhin in umgekehrter Reihenfolge. Noch deutlicher wird es, wenn wir $\lambda t = 2\omega_1 - \lambda t_1$ substituiren und t_1 alle Werthe von T bis 0 durchlaufen lassen. Der Quotient der Sigmafunctionen in 53. bleibt ungeändert: $\frac{\sigma (\lambda t_1)}{\sigma_2 (\lambda t_1)}$ u. s. w.

muß auch $\cos\chi$ und daher χ alle die Werthe in umgekehrter Ordnung wieder durchlaufen.

Wächst t über 2T hinaus, so erhält $\cos\chi$ nach und nach wieder alle Werthe, von β anfangend, und den Werth α, sobald t bis zu 3T gewachsen ist. Kurz der cos des Winkels χ schwankt in der halben Periode T entweder zwischen α und β oder zwischen β und α. In der Zeitperiode 2T wird also die Rotationsachse eine volle Schwingung vollendet haben. In jedem Moment wird ihre Lage durch die Formel

$$54.\quad \cos\chi - \sin\omega = {}^1/_4\,(\alpha-\beta)\,(\beta-\gamma)\,\frac{\sigma^2(\lambda t)}{\sigma^2{}_2(\lambda t)}$$

bestimmt. Und zwar sind $\sin\omega$ und β zwei gleich bedeutende Constante, abhängig von der Lage der Rotationsachse zur Zeit $t=0$. Der Quotient, welcher angiebt, wie oft die Periode 2T in irgend einem gegebenen Zeitabschnitte enthalten ist, zeigt zugleich an, wie viele Schwankungen die Rotationsachse während der Dauer dieses Zeitabschnittes vollendet hat.

Die Periode 2T ist zu berechnen aus der Formel

$$54a\quad T=\int_{\beta}^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)\,(x-\beta)\,(x+\gamma)}}=-\int_{\infty}^{e_1}\frac{ds}{\sqrt{4\,(s-e_1)\,(s-e_2)\,(s-e_3)}}$$

Man kann x oder $\cos\chi$ auch durch andere Formeln darstellen. Ohne Mühe findet man

$$\alpha-\cos\chi=(\alpha-\beta)\frac{\sigma_1{}^2(\lambda t)}{\sigma_2{}^2(\lambda t)}\text{ und}$$

$$\gamma+\cos\chi=(\gamma+\beta)\frac{\sigma_3{}^2(\lambda t)}{\sigma_2{}^2(\lambda t)}.$$

Wir fanden aber S. 30 unter Nr. 46a die Gleichung:

$$A\sin^2\chi\cdot d\psi=Cr\,(\cos\chi-\sin\omega)\,dt.$$

Substituiren wir wieder x statt $\cos\chi$ und β statt $\sin\omega$, so wird

$$55.\quad d\psi = \frac{Cr\,(x-\beta)}{A\,(1-x^2)}\,dt = \frac{Cr}{2A}\left(\frac{1-\beta}{1-x} - \frac{1+\beta}{1+x}\right)dt.$$

Um das hier noch enthaltene x auch als Function von t auszudrücken, gehen wir zurück auf eine schon S. 30 entwickelte Gleichung:

$$x-\beta = 4\,[e_2 - p\,(\lambda t + \omega_2 + \omega_3).]$$

Daraus ist denn

$$1-x = 1-\beta-4\,e_2+4\,p\,(\lambda t+\omega_2+\omega_3)$$

$$1+x = 1+\beta+4\,e_2-4\,p\,(\lambda t+\omega_2+\omega_3).$$

Jetzt mögen 2 Constante, μ und ν, so bestimmt gedacht werden, daß die Function p (u) für den Werth μ des Arguments gleich

$e_2 - \frac{1-\beta}{4}$ und für den Werth ν des Arguments gleich $e_2 + \frac{1+\beta}{4}$ wird. Zugleich soll die erste Ableitung der Function p (u) nach u genommen, die Werthe $^1/_4\,(1-\beta)$ oder $^1/_4\,(1+\beta)$ annehmen, sobald man das Argument durch μ oder ν ersetzt. Es sei also:

$$56.\quad \begin{cases} e_2 - \frac{1-\beta}{4} = p\,(\mu) \text{ und } \frac{1-\beta}{4} = p'\,(\mu), \text{ so wie} \\ e_2 + \frac{1+\beta}{4} = p\,(\nu) \text{ und } \frac{1+\beta}{4} = p'\,(\nu) \end{cases}$$

Dann wird sein

$$57.\quad \begin{cases} \frac{1-\beta}{1-x} = -\frac{p'\,(\mu)}{p\,(\mu)-p\,(\lambda t+\omega_2+\omega_3)} \text{ und} \\ \frac{1+\beta}{1+x} = \frac{p'\,(\nu)}{p\,(\nu)-p\,(\lambda t+\omega_2+\omega_3)} \end{cases}$$

Mit Benutzung der Gleichung 57 wird die Gleichung 55 integrabel. Es ist nämlich zufolge Gleichung 21 auf S. 12

$$\frac{p'(\mu)}{p(\mu)-p(\lambda t+\omega_1+\omega_3)} = \frac{\sigma'(\lambda t+\mu+\omega_2+\omega_3)}{\sigma(\lambda t+\mu+\omega_1+\omega_3)}$$

$$+\frac{\sigma'(\mu-\lambda t-\omega_1-\omega_3)}{\sigma(\mu-\lambda t-\omega_1-\omega_3)} - 2\frac{\sigma'(\mu)}{\sigma(\mu)}.$$

Analog ist die Umformung für die 2. Gleichung in 57. Es ist ferner

$$\frac{\sigma'(\lambda t+\mu+\omega_2+\omega_3)}{\sigma(\lambda t+\mu+\omega_2+\omega_3)} = \eta_2+\eta_3+\frac{\sigma'_2(\lambda t+\mu)}{\sigma_2(\lambda t+\mu)} \text{ und}$$

$$\frac{\sigma'(\mu-\lambda t-\omega_2-\omega_3)}{\sigma(\mu-\lambda t-\omega_1-\omega_3)} = -\eta_2-\eta_3-\frac{\sigma'_2(\lambda t-\mu)}{\sigma_2(\lambda t-\mu)}$$

Wir erhalten demnach

$$58.\quad d\psi = -\frac{Cr}{2A}\left(\frac{\sigma'_2(\lambda t+\mu)}{\sigma_2(\lambda t+\mu)}-\frac{\sigma'_2(\lambda t-\mu)}{\sigma_2(\lambda t-\mu)}-2\frac{\sigma'(\mu)}{\sigma(\mu)}\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma'_2(\lambda t+\nu)}{\sigma_2(\lambda t+\nu)}-\frac{\sigma'_2(\lambda t-\nu)}{\sigma_2(\lambda t-\nu)}-2\frac{\sigma'(\nu)}{\sigma(\nu)}\right)dt.$$

Jetzt kann die rechte Seite der Gleichung 58 gliedweise integrirt werden. Zufolge der Auseinandersetzung auf S. 29 wird die Integrations-Constante so bestimmt, daß für $t=0$ auch ψ verschwindet; da die Function $\sigma_2(u)$ eine gerade Function ist, d. h. da $\sigma_2(-u)=\sigma_2(u)$ ist, erhalten wir aus Nr. 58 durch Intregation

$$59.\ \psi = \frac{Cr}{2A\lambda}\left\{2\left(\frac{\sigma'(\mu)}{\sigma(\mu)}+\frac{\sigma'(\nu)}{\sigma(\nu)}\right).\lambda t+\log.\,\text{nat}\,\frac{\sigma_2(\lambda t-\mu)}{\sigma_2(\lambda t+\mu)}\right.$$

$$\left.+\log.\,\text{nat}.\,\frac{\sigma'_2(\lambda t-\nu)}{\sigma_2(\lambda t+\nu)}\right\}.$$

Endlich bleibt noch φ zu bestimmen. Dazu dient Gleichung 40 auf S. 26:

$d\varphi = r.\,dt + \cos\chi.\,d\psi$ oder mit Benutzung der Substitution $\cos\chi = x$ und der Gleichung 55:

$$60.\quad d\varphi = r.\,dt + \frac{Cr}{A}\cdot\frac{x(x-\beta)}{1-x^2}\,dt$$

$$= \frac{A-C}{A}\,r.\,dt + \frac{Cr}{2A}\left(\frac{1-\beta}{1-x} + \frac{1+\beta}{1+x}\right)dt$$

Mit Hülfe der Substitutionen 56 läßt sich der 2. Theil der rechten Seite in Nr. 60 integrirbar machen. Nach dem, über $d\psi$ voraufgegangenen Entwicklungen kann das Resultat dieser Umformungen sofort niedergeschrieben werden; man hat nämlich nur in den Gliedern, welche Sigmafunctionen mit dem Argumente ν enthalten, das Vorzeichen zu wechseln; im Uebrigen sind die Umformungen den soeben durchgemachten völlig gleich. Es ist ferner die Integrations-Constante wieder so zu bestimmen, daß $\varphi = 0$ und $t = 0$ zusammengehörige Werthe sind. Demnach ist

$$61.\quad \varphi = \frac{A-C}{2A\lambda}\cdot r.\,t + \frac{Cr}{2A\lambda}\left\{2\left(\frac{\sigma'(\mu)}{\sigma(\mu)} - \frac{\sigma'(\nu)}{\sigma(\nu)}\right)\lambda t\right.$$

$$\left. + \log.\,\text{nat.}\,\frac{\sigma_2(\lambda t-\mu)\cdot\sigma_2(\lambda t+\nu)}{\sigma_2(\lambda t+\mu)\cdot\sigma_2(\lambda t+\nu)}\right.$$

So sind durch die Gleichungen 54, 59 u. 61 die 3 Winkel χ, ψ und φ für jeden Werth von t bestimmt. In den letzteren beiden Gleichungen kommen freilich noch Functionen der Größen μ und ν vor; aber nach den unter Nr. 56 auf S. 36 gemachten Annahmen lassen sich diese Größen μ und ν, sowie ihre Functionen $\frac{\sigma'(\mu)}{\sigma(\mu)}$ und $\frac{\sigma'(\nu)}{\sigma(\nu)}$ berechnen. Es ist auf S. 16 gezeigt worden, wie unter der Annahme, daß der Wer

einer Function p (u) und der des dazu gehörigen p′ (u) gegeben sind, die Größe von u berechnet werden könne, abgesehen von gewissen Constanten; man erhält für u eine unendliche Reihe von Werthen (vergl. Nr. 34 auf S. 16), welche aber unter einander congruent sind. Zugleich ersieht man aus den a. a. O. gemachten Entwicklungen, daß man die Werthe von $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ erhält, wenn man in der Formel 34 auf S. 16 die Größen ω_1 und ω_3, welche als Factoren vor den logg. stehen, durch η_1 bezügl. η_3 ersetzt.

Die Formel 59 zeigt uns, daß der Winkel φ für alle Werthe von t positiv ist. Nach der auf S. 20 über seine Zählung gemachten Annahme hat also, wie das Experiment uns schon zeigte, die Durchschnittslinie der Horizontalen und der Aequatorebene eine rückgängige Bewegung. Denn der Winkel φ, welcher die Rotationsrichtung der Kugel angiebt, sollte nach der positiven y_1-Achse hin (von der anfänglichen Lage der Ox-Achse angerechnet, welche mit der Ox_1-Achse zusammenfiel) gezählt werden; der Winkel ψ hingegen sollte in der entgegengesetzten Richtung, nach der negativen y-Achse hin, gerechnet werden und in dieser Richtung genommen ergiebt er sich stets als positiv.

Würde das kleine Gewicht nicht (wie bisher vorausgesetzt worden) in der Nähe des niedriger gelegenen Endpunktes der Rotations-Achse, sondern an dem gegenüberliegenden Endpunkte befestigt, so hätte man nur das positive Vorzeichen von l in das negative zu verwandeln; denn die z_1-Coordinate des Schwerpunktes der Masse M würde jetzt negativ sein. Der Radikant in Nr. 47 auf S. 31 geht also über in $(\cos\chi - \sin\omega)\,[-2\,\mathrm{Amgl}\sin^2\chi - C^2r^2\cos\chi - \sin\omega)]$

ferner wird kommen an Stelle von

$$D\ C^4r^4 - 8\ AMgl\ C^2r^2 \cdot \sin\omega + 16\ A^2M^2g^2l^2;$$

endlich erhält man $-\alpha_1$ und $-\gamma_1$ an Stelle von α und γ; und zwar ist

$$\gamma_1 > \beta > -\alpha_1,$$

so daß wir statt $(\alpha - x)(x - \beta)(x + \gamma)$ schreiben müssen

$$(x + \alpha_1)(\beta - x)(x - \gamma_1).$$

Jetzt liegt x in dem Intervall $\beta \ldots -\alpha_1$; es wird x also zunächst mit wachsendem t abnehmen und es ist also

$$62.\quad dt = -\frac{dx}{\lambda\sqrt{(x+\alpha_1)(\beta-x)(x-\gamma_1)}}.$$

Die weitere Lösung ist der vorhergehenden fast vollständig gleich. Die Vergleichung dieser Formel 62. mit Nr. 49. auf S. 31 zeigt uns, daß, sobald $+1$ mit -1 vertauscht wird, scheinbar $+\lambda$ in $-\lambda$ übergeht; in der That ist aber das nicht der Fall, vielmehr ist lediglich $-\alpha_1$ statt α_1 und $-\gamma_1$ statt γ zu setzen, und zu beachten, daß $x \leqq \beta$ ist:

Mit Berücksichtigung des letzten Umstandes entnehmen wir aus Nr. 55 auf S. 36, daß unter der gemachten Voraussetzung sich das Zeichen von ψ ändert, daß die Bewegung der Durchschnittslinie der beiden Ebenen also im Sinne der Rotation der Kugel vor sich geht.

Wir haben oben auf S. 15 die Formeln angegeben, welche die Weierstraßschen Sigma-Functionen mit den Jacobischen Thetafunctionen verbinden. In unseren Formel 59 und 61 auf S. 37 und 38 kommt nur die Functio σ_2 vor. Sucht man für diese eine Reihenentwicklung, findet man

63. $\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} (1 + 2h\cos 2v + 2h^4 \cos 4v + 2h^9 \cos 6v + \ldots)$

wo c_2 eine Conſtante, nämlich $\sqrt{\frac{2\omega_2}{\pi}} \sqrt[4]{e_2 - e_3}$,

$h = e^{\frac{\omega_1 \pi i}{\omega_2}}$ (nebenbei bemerkt, gleich der Größe, welche Jacobi mit q bezeichnet hat) und $v = \frac{u\pi}{2\omega_2}$ iſt. Entwickelt man nun aus Nr. 63 den log. n. $\sigma_2(u)$ in eine Potenzreihe nach u, ſo ergiebt ſich, daß die Reihe nur die geraden Potenzen von u enthält, indem ſie mit der 0. Potenz anhebt. Sie heißt alſo etwa

$$\log. n. \sigma_2(u) = a_0 + a_1 u^2 + a_2 u^4 + \ldots.$$

Die Coefficienten a_0, a_1 a_2 ... ſind rational aus den Größen h, π und ω_2 zuſammengeſetzt.*) Wenn wir jetzt dem Argument u die Werthe $\lambda t + \mu$ und $\lambda t - \mu$ beilegen, ſo werden, ſobald die beiden ſo erhaltenen Reihen ſubtrahirt werden, die conſtanten Glieder und die mit geraden Potenzen von λt oder μ behafteten Glieder ſich fortheben. Man erhält alſo:

$$\log. n \frac{\sigma_2(\lambda t - \mu)}{\sigma_2(\lambda t + \mu)} = -4\lambda . \mu . t (b_0 + b_2 \lambda^2 . \mu^2 t^2 + \ldots.)$$

Die Reihe in der Klammer enthält nur die geraden Potenzen von λt und μ; ihre Coefficienten $b_0, b_1, b_2 \ldots$ ſind ratio-

*) Aus der Formel 30 auf S. 15 können wir ſogar noch ſchließen, daß a_0 verſchwinden muß, weil $\sigma_2(o) = 1$ iſt; indeſſen iſt das für uns unweſentlich.

nale Functionen der Coefficienten a_1, a_2, a_3, a_4 ..... Ersetzen wir μ durch ν, so ändert sich in der Entwicklung nichts. Die beiden Glieder

$$\log. \text{n.} \frac{\sigma_2(\lambda t - \mu)}{\sigma_2(\lambda t + \mu)} \text{ und } \log. \text{n.} \frac{\sigma_2(\lambda t - \nu)}{\sigma_2(\lambda t + \nu)}$$

in der Formel Nr. 59 S. 37 sind mithin beide zu der Zeit t proportional. Und daher wächst ψ in demselben Verhältniß als die Zeit t, sobald das kleine Gewicht auf dem innersten Ringe der Maschine in der Nähe des tiefer gelegenen Endpunktes der Rotationsachse angebracht ist Im entgegengesetzten Falle nimmt ψ in demselben Verhältniß, als t (von O anfangend) wächst, ebenfalls von O an gerechnet ab.

Aus Nr. 60 auf S. 38 ersieht man, daß demnach φ ebenfalls stets proportional zur Zeit t wächst.

Und zwar gelten diese Betrachtungen für alle Werthe von t, und also auch, sobald t gleich einem Vielfachen der halben Periode T (vgl. S. 32 ff.) wird. Es sei z. B. t bis zu T gewachsen. Dann ist $\lambda t = \omega_1$ zu setzen (S. 33). Es ist aber

$$\sigma_2(\omega_1 - \mu) = e^{-\eta_2\mu + (\eta_1 + \eta_3)\omega_2} \frac{\sigma(\omega_3) \cdot \sigma_3(\mu)}{\sigma(\omega_1 + \omega_3)} \text{ und}$$

$$\sigma_2(\omega_1 + \mu) = e^{\eta_2\mu + (\eta_1 + \eta_3)\omega_2} \frac{\sigma(\omega_3) \cdot \sigma_3(\mu)}{\sigma(\omega_1 + \omega_3)} \text{ und}$$

demnach:

$$\log. \text{n.} \frac{\sigma_2(\omega_2 - \mu)}{\sigma_2(\omega_2 + \mu)} = -2\eta_2\mu = -2\mu \frac{\sigma'(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}$$

wo mit $\sigma'(\omega_2)$ die erste Ableitung bezeichnet ist (vgl. S. 1

Nr. 20). Bezeichnen wir den zu $t = T$ gehörenden Werth von ψ mit ψ_1, so ist also:

$$64. \quad \psi_1 = \frac{C.r}{A\lambda}\left[\left(\frac{\sigma'(\mu)}{\sigma(\mu)} + \frac{\sigma'(\nu)}{\sigma(\nu)}\right)\omega_1 - \frac{\sigma'(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}(\mu+\nu)\right]$$

Dieser Werth von ψ soll dem Werthe T proportional sein. Das ist der Fall, wenn

$\frac{\sigma'(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)}(\mu+\nu)$ diesem $T = \frac{\omega_2}{\lambda}$ proportional ist.

Aber die Entwicklung von $\frac{\sigma'(\omega_2)}{\sigma(\omega_1)}$ nach Potenzen von ω_1 hebt an mit $\omega_2 - 1$; die folgenden Glieder enthalten dann die ungeraden Potenzen von ω_1, die erste ausgeschlossen.

Mithin muß $\mu+\nu$ den Factor ω_2 enthalten.

Bestimmt man in derselben Weise den zu $t = T$ gehörenden Werth von ψ, so gelangt man zu dem Schlusse, daß auch $(\mu-\nu)$ die Größe ω_1 als Factor enthalten muß.

Demnach sind die Größen μ und ν einzeln ebenfalls in ω_2 multiplicirt.

Uebrigens findet man leicht, daß, um die Werthe von ψ und φ nach Verlauf von n halben Zeitperioden T zu finden, man in der Formel 64 für ψ_1 und der analogen für φ_1 nur $n(\mu+\nu)$ resp. $n(\mu+\nu)$ statt $\mu+\nu$ und $\mu-\nu$ zu setzen hat; also

$$\psi_n = \frac{Cr}{A\lambda}\left[\left(\frac{\sigma'(\mu)}{\sigma(\mu)} + \frac{\sigma'(\nu)}{\sigma(\nu)}\right) n.\omega_1 - \frac{\sigma'(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}.n(\mu+\nu)\right].$$

$$\varphi_n = \frac{A-C}{A}.n.r.T$$

$$+ \frac{Cr}{A\lambda}\left[\left(\frac{\sigma'(\mu)}{\sigma(\mu)} - \frac{\sigma'(\nu)}{\sigma(\nu)}\right) n.\omega_1 - \frac{\sigma'(\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}.n(\mu-\nu)\right].$$

Schließlich wollen wir noch die Formeln Nr. 53, 59 und 61 auf S. 34, 37 und 38 durch Jacobiſche Thetafunctionen ausdrücken.

$$\cos\chi - \sin\omega = \frac{\pi^2}{\lambda^2 T^2} \cdot \vartheta^2(0) \cdot \vartheta_2^2(0) \cdot \cdot \frac{\vartheta_2^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}{\vartheta_3^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}.$$

$$\psi = \frac{Cr}{2A\lambda}\left[\frac{\pi t}{T}\left(l'\vartheta_1\left(\frac{\pi\mu}{2\lambda T}\right) + l'\vartheta_1\left(\frac{\pi\nu}{2\lambda T}\right)\right)\right.$$

$$\left. + \log.\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{2T}[t-\frac{\mu}{\lambda}]\right).\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2T}[t-\frac{\nu}{\lambda}]\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2T}[t+\frac{\mu}{\lambda}]\right).\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2T}[t+\frac{\nu}{\lambda}]\right)}\right\}.$$

$$\varphi = \frac{A-C}{A} \cdot r.t + \frac{Cr}{2A\lambda}\left\{\frac{\pi t}{T}\left(l'\vartheta_1\left(\frac{\pi\mu}{2\lambda T}\right) - l'\vartheta_1\left(\frac{\pi\nu}{2\lambda T}\right)\right)\right.$$

$$\left. + \log.\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2T}[t-\frac{\mu}{\lambda}]\right).\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2T}[t+\frac{\nu}{\lambda}]\right)}{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2T}[t+\frac{\mu}{\lambda}]\right).\vartheta_3\left(\frac{\pi}{2T}[t-\frac{\nu}{\lambda}]\right)}\right\}.$$

Und zwar iſt

$$T = \frac{2 \cdot A \cdot K}{\sqrt[4]{16A^2M^2g^2l^2 + 8AMg.l.C^2r^2\sin\omega + C^4r^4}}$$

wo K in dem Jacobiſchen Sinne als Viertel-Periode der elliptiſchen Functionen sin am (u) u. ſ. w. genommen iſt.

Wie man ſich leicht überzeugen kann, gewinnen die Formeln nicht die Kürze und Ueberſichtlichkeit, welche wir mit Benutzung der Weierſtraßſchen Methoden erlangt haben wenn man die Löſung der Aufgabe auf anderem Wege verſucht

Verbeſſerungen.

S. 6 Z. 8 v. u. l. $\sqrt{R_x(s)}$.
„ 8 „ 8 „ l. e_x ſtatt e,
„ 10 „ 12 v. u. l. $p(u_1)$ ſt. $p(u_,)$.
„ 11 „ 12 v. o. l. $-3.\frac{2g_3}{7!}u^6$
„ 14 „ 5 v. o. l. y/x ohne index.
„ „ „ 10 v. o. (....) wegzulaſſen.
„ 16 letzte Zeile l. $B_\nu+1$.
„ 17 Z. 1 v. o. l. $\frac{4\omega_x^2}{\nu}.B_\nu-2$.
„ 22 „ 9 v. o. l. dy ſt. $d\nu$.
„ 24 „ 4 v. o. l. $(qr-\frac{dp}{dt})z^2_1$.